

تعیین برد و مطالبی از تابع

برد تابع به معادله $f(x) = x^2 - 4x + 10$ را به سه روش بیابید

حل:

روش اول : سطر سوم جدول تغییرات تابع ، برد تابع را نشان می دهد

$$y' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	6	$+\infty$

برد تابع : $y \geq 6$

روش دوم: X را از معادله تابع به دست می آوریم ، سپس محدوده Y را چنان تعیین می کنیم تا X وجود داشته باشد

$$x^2 - 4x + (10 - y) = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y - 6} \Rightarrow y - 6 \geq 0 \Rightarrow y \geq 6$$
 برد تابع

$$y = x^2 - 4x + 10 \Rightarrow y = (x - 2)^2 + 6$$
 روش سوم:

می نی مم $(x - 2)^2$ ، صفر و بیشترین مقدار آن وجود ندارد ولی به سمت $+\infty$ میل می کند پس برد تابع $y \geq 6$

برد تابع به معادله $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ را به دو روش بیابید

حل:

$$y = \frac{4x}{x^2 + 1} \Rightarrow yx^2 - 4x + y = 0$$
 روش اول

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - y^2}}{y} \Rightarrow 16 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$$

لازم نیست $0=y$ را از برد تابع بر داریم زیرا اگر $0=x$ آنگاه $0=y$ پس $0=y$ در برد تابع وجود ندارد

$$x = \tan \alpha \Rightarrow y = 4 \times \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 4 \sin 2\alpha$$
 روش دوم:



تعیین برد و مطالبی از تابع

بیشترین مقدار $\sin 2\alpha$ ، ۱ و کمترین مقدار آن ۱- است پس : $-2 \leq y \leq 2$

تمرین

۱- برد تابع به معادله $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ را بیابید

۲- برد تابع به معادله $f(x) = [\tan x + \cot x]$ را بیابید

۳- برد تابع به معادله $f(x) = \cos^2 x - \cos x$ را بیابید

۴- برد تابع به معادله $f(x) = x - 4\sqrt{x}$ را بیابید

تابع به معادله $f(x) = \begin{cases} 6x - 5 & x \geq 2 \\ 2x + 2 & x < 2 \end{cases}$ مفروض است معادله این تابع را با یک ضابطه بنویسید

حل: چون ضابطه تابع از درجه اول است و در عدد ۲ به دو ضابطه تقسیم شده است باید معادله $f(x)$

به صورت $f(x) = ax + b + k|x - 2|$ باشد

$$x \geq 2 : f(x) = ax + b + kx - 2k$$

$$f(x) = (a + k)x + (b - 2k) \equiv 6x - 5$$

$$a + k = 6, b - 2k = -5$$

$$x < 2 : f(x) = ax + b - kx + 2k$$

$$f(x) = (a - k)x + (b + 2k) \equiv 2x + 2$$

$$a - 2k = 2, b + 2k = 2$$

$$\begin{cases} a + k = 6 \\ a - k = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 4, k = 2$$

$$a + 2k = 2 \Rightarrow b + 4 = 2 \Rightarrow b = -2, f(x) = 4x - 2 + 2|x - 2|$$

تمرین: تابع به معادله $f(x) = \begin{cases} 14x - 2 & x \geq 1 \\ -2x + 16 & x < 1 \end{cases}$ مفروض است معادله این تابع را با یک ضابطه بنویسید

آیا دو تابع $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} \\ g(x) = \sqrt{x(1-x)} \end{cases}$ با هم مساویند

تعیین برد و مطالبی از تابع

حل: دو تابع f و g وقتی مساویند که اولاً $D_f = D_g$ ثانیاً برای هر $x \in D_f = D_g$ ، $f(x) = g(x)$

پس دو تابع مساویند زیرا دامنه ها مساوی و ضابطه ها مساوی است

تمرین:

کدام یک از تابع های به معادله های زیر مساویند

$$\text{الف) } \begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} \\ g(x) = \sqrt{x(x-1)} \end{cases} \quad \text{ب) } \begin{cases} f(x) = \left[\frac{x^2+1}{x^2+1} \right] \\ g(x) = \frac{x^2+8}{x^2+8} \end{cases}$$

ثابت کنید تابع زیر فرد است

$$f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$D_c = R$$

∴

$$f(-x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x)^{-1} \Rightarrow f(-x) + f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x)^{-1} + \log(\sqrt{x^2 + 1} + x)^{-1}$$

$$f(-x) + f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x)^{-1} (\sqrt{x^2 + 1} + x)^{-1} = \log(x^2 + 1 - x^2)^{-1} = \log 1 = 0.$$

$$f(-x) + f(x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad f \text{ فرد است}$$

ثابت کنید تابع به معادله $f(x) = \left[\frac{x}{1-x} \right] + \left[\frac{x+7}{1+x} \right]$ تابعی زوج است

$$D_f = R - \{\pm 1\}$$

حل:

$$\left[\frac{rx+y}{1+x} \right] = \left[\frac{r(x+1)+y}{1+x} \right] = \left[y + \frac{r}{1+x} \right] = y + \left[\frac{r}{1+x} \right]$$

$$f(x) = \left[\frac{v}{1-x} \right] + \left[\frac{v}{1+x} \right] + v$$

$$f(-x) = \left[\frac{r}{1+x} \right] + \left[\frac{r}{1-x} \right] + r = f(x) \Rightarrow f \text{ زوج است}$$

تمرین

۱- ثابت کنید تابع داده شده فرد است

$$g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$$



تعیین برد و مطالبی از تابع

۲- تابع به معادله $f(x) = \left[\frac{|x|}{|x|+1} \right]$ چه نوع تابعی است

۳- تابع به معادله $f(x) = (a-2)x^2 + (ab-1)x^2 + (b+1)x + b - 1$ مفروض است

الف) a و b را چنان بیابید تا این تابع فرد باشد

ب) a و b را چنان بیابید تا این تابع زوج باشد